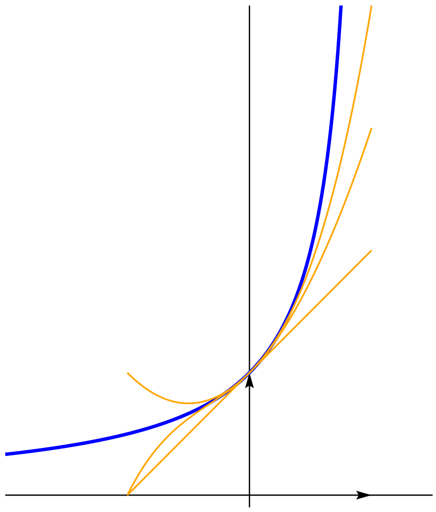
Notion de développement limité en 0

1 Définition

Définition. Soit f définie sur D contenant un voisinage de 0. On dit que f **admet un développement limité d'ordre n en** 0 si l'on peut écrire

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \varepsilon(x) x^n \qquad \text{avec } \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

Exemple. Soit $f(x) = \frac{1}{1-x}$. On cherche un DL de f au point 0.



2 Exemples de développements limités

Remarque.

Étude. □

Résultat.

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3 \overset{\to 0}{\varepsilon(x)}} \text{ DL à l'ordre 3.}$$

Suite de l'étude. □

Résultat.

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^4 \overset{\to 0}{\varepsilon(x)}} \text{ DL à l'ordre 4.}$$

Autres DL classiques.

$$\boxed{\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + x^3 \overset{\to 0}{\varepsilon(x)}} \quad \boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \overset{\to 0}{\varepsilon(x)}}$$

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + x^2 \overset{\to 0}{\varepsilon(x)}} \quad \boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + x^3 \overset{\to 0}{\varepsilon(x)}}$$

$$\boxed{\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + x^3 \overset{\to 0}{\varepsilon(x)}}$$

3 Exemples d'utilisation

Exemple. Donner une valeur approchée de $\dfrac{1}{0,99}$.

Exemple. Déterminer la limite en 0 de $\dfrac{\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}-1}{x^2}$.

Exemple. Soit $f(x)=\dfrac{\cos x - 1}{x^2}$, définie sur $\mathbb{R}^*$. Par opération, f est continue sur $\mathbb{R}^*$. On voudrait savoir si f est prolongeable par continuité en 0, puis savoir si ce prolongement est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3.1 Déterminer la limite en 0 à droite de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

3.2 Étudier la limite en 0 de $\dfrac{2}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{1-\cos x}$.

3.3 Déterminer la limite en 0 de :

$$\frac{(e^x - 1)\tan x}{(1-\cos x)}$$

3.4 Déterminer la limite en 1 de :

$$\frac{\ln\left(\sin \frac{\pi}{2} x\right)}{(x-1)^2}$$

3.5 Déterminer la limite en 0 de :

$$\frac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x - e^{-x}}$$

3.6 Déterminer la limite en $\frac{\pi}{2}$ de :

$$(1+\cos x)^{\frac{3}{\cos x}}$$

3.7 Calculer les limites des expressions suivantes :

(a) $\dfrac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x^2}$ en 0 $\quad$ (b) $\dfrac{\tan x - x}{x^3}$ en 0

(c) $\dfrac{1+\ln(1+x)-(\sin x + \cos x)}{x^3}$ en 0 $\quad$ (d) $\dfrac{x(1+\cos x) - 2\tan x}{2x - \sin x - \tan x}$ en 0

(e) $\dfrac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$ en 1

3.8 Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x - 1}{x} \end{array}$

Donner un prolongement par continuité de f à $\mathbb{R}$. Ce prolongement est-il dérivable ?

3.9 Soit $\varphi : \begin{array}{rcl} \left]0, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \end{array}$.

(a) Montrer que φ se prolonge de façon continue en 0.

(b) Montrer que ce prolongement est dérivable en 0.

(c) Étudier la continuité de la dérivée.