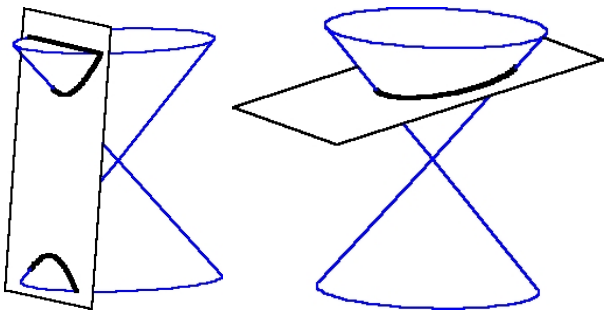
Coniques

1 Définition

1.1 Introduction.



En mathématiques.
Propagation des ondes.
En mécanique.

1.2 Définition monofocale

Définition. Soit F un point du plan, $\mathcal{D}$ une droite telle que $F \notin \mathcal{D}$ et $e > 0$. On appelle **conique de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité** e la courbe Γ formée des points M du plan vérifiant :

- Si $0 < e < 1$, on dit que Γ est
- Si $e = 1$, on dit que Γ est
- Si $e > 1$, on dit que Γ est

Remarque.

1.3 Équation polaire d'un conique

1.3.1 Équation polaire

Théorème.

On se place dans le repère particulier $\mathcal{R} = (F; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où F est le foyer, et où la directrice $\mathcal{D}$ a pour équation $x \cos\varphi + y \sin\varphi = d > 0$. Alors

$$M \in \Gamma \iff \rho =$$

On note

1.3.2 Tangentes

Propriété. La tangente en $M(\theta)$ à une conique donnée par son équation en polaires $\rho = \frac{p}{1+e\cos\theta}$ est dirigée par le vecteur

1.3.3 Exemples

Exemple 1. $\mathcal{D} : x = 1$, $e = \frac{1}{2}$
Exemple 2. $\mathcal{D} : x + y = 1$, $e = 1$.

Exemple 3. $\mathcal{D}\ :\ x = -2,\ e = 2$
Exemple 4. $\mathcal{D}\ :\ y = 2,\ e = \frac{1}{3}$
Exemple 5. Reconnaître et caractériser la courbe d'équation polaire $\rho = \frac{3}{2+5\sin\theta}$.
Exemple 6. Est-ce que la courbe d'équation polaire $\rho = \frac{1}{1-\sin\theta}$ est une parabole ?
Exemple 7. Est-ce que la courbe d'équation polaire $\rho = \frac{1}{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}$ est une ellipse ?
Exemple 8. Est-ce que la courbe d'équation polaire $\rho = \frac{1}{1+\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}$ est une ellipse ?

1.4 Équations cartésiennes réduites (tour d'horizon)

Dans un repère bien choisi, les coniques admettent une **équation réduite** :

Formulaire du chap 9

Parabole (e=1).

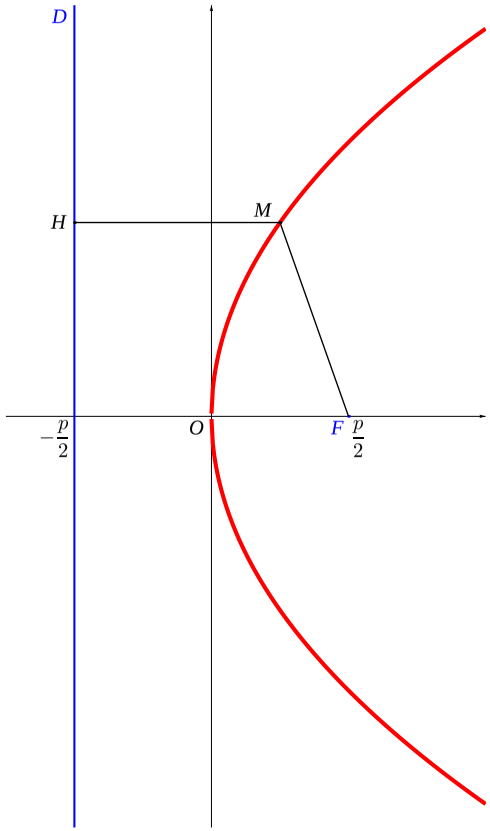
Équation réduite : $y^2 = 2px$

$p = ed$

Foyer : $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

Directrice : $\mathcal{D}\ :\ x = -\frac{p}{2}$

Paramétrage : $\begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{2p} \\ y(t) = t \end{cases}$



Ellipse (0<e<1).

Équation réduite : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

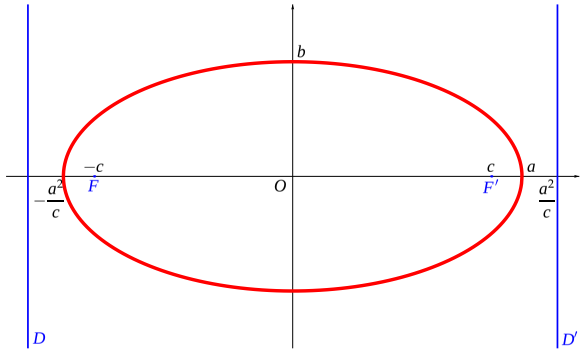
$0 < b < a$, $c^2 = a^2 - b^2$; $e = \frac{c}{a}$.

$a = \frac{de}{1-e^2}$ et $b = \frac{de}{\sqrt{1-e^2}}$

Foyers : $F\ (-c, 0)$ et $F'\ (c, 0)$

Directrice : $\mathcal{D}\ :\ x = -\frac{a^2}{c}$ et $\mathcal{D}'\ :\ x = \frac{a^2}{c}$

Paramétrage : $\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{cases}$



Hyperbole (e>1).

Équation réduite : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

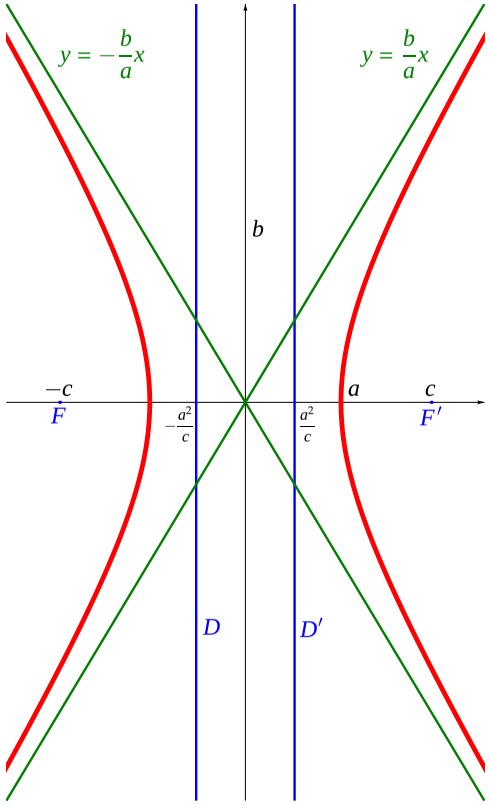
$c^2 = a^2 + b^2$; $e = \frac{c}{a}$.

Foyers : $F\ (-c, 0)$ et $F\ (c, 0)$

Directrice : $\mathcal{D}\ :\ x = -\frac{a^2}{c}$ et $\mathcal{D}'\ :\ x = \frac{a^2}{c}$

Paramétrage : $\begin{cases} x(t) = \varepsilon a \operatorname{ch} t \\ y(t) = b \operatorname{sh} t \end{cases}$ $\varepsilon = \pm 1$

Asymptotes : $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$



2 Propriétés.

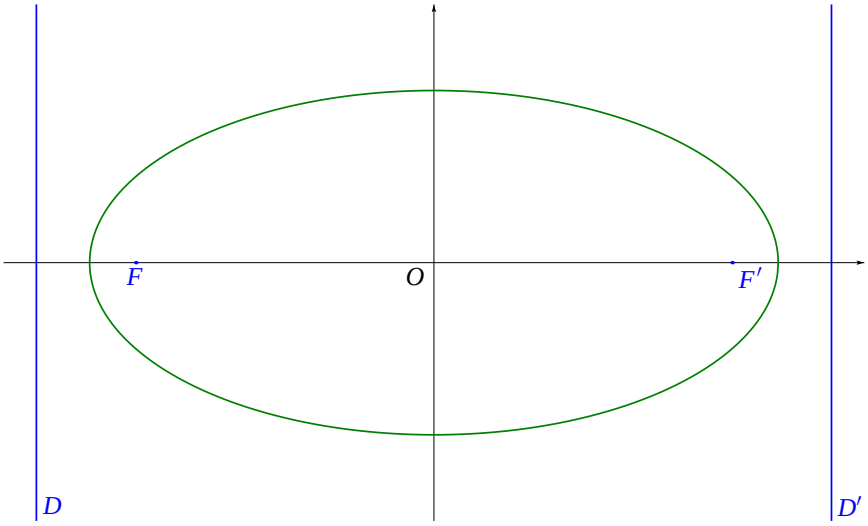
2.1 Propriétés de la parabole.

Vocabulaire. On parle du **sommet** et de l'**axe** de la parabole.
Exercice (Th. de Poncelet). Montrer que la tangente T au point M est la bissectrice de l'angle $\widehat{HMF}$.
Application.

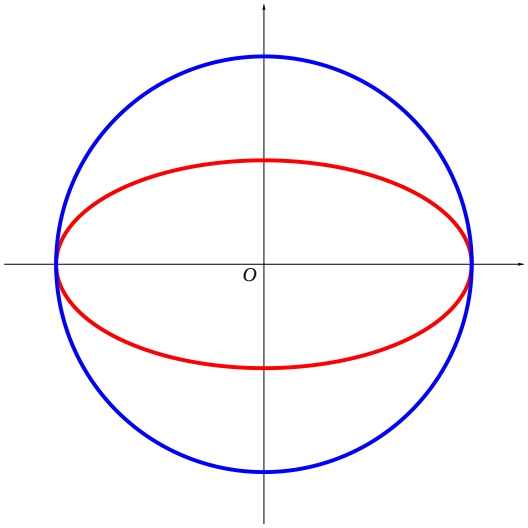
2.2 Propriétés de l'ellipse.

Remarque. *Dans ce qui précède comme dans ce qui suit, on suppose* $0 < b < a$.
Vocabulaire.

Remarque.



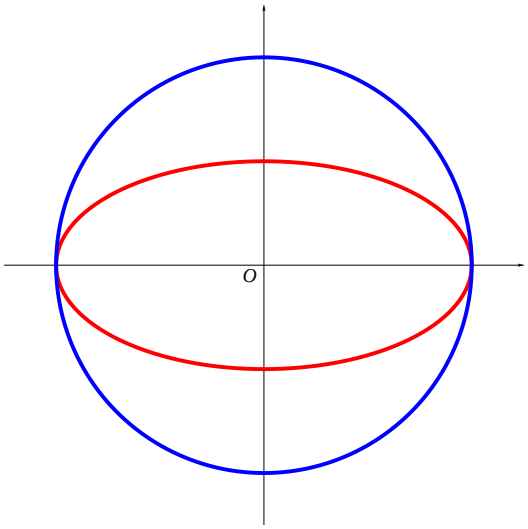
Proposition. L'image d'un cercle par une affinité orthogonale est une ellipse.
Définition. L'ellipse d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est l'image du cercle d'équation $x^2 + y^2 = a^2$ par l'affinité orthogonale d'axe xx' et de rapport $\frac{b}{a}$. Le cercle s'appelle **cercle principal** de l'ellipse.



Corollaire. Représentation paramétrique de l'ellipse.

$$\begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$$

Application. Construction de la tangente à l'ellipse en un point.



Propriété. Équation de la tangente en un point $M_0(X_0, Y_0)$.

Elle est obtenue en paramétrant l'ellipse.

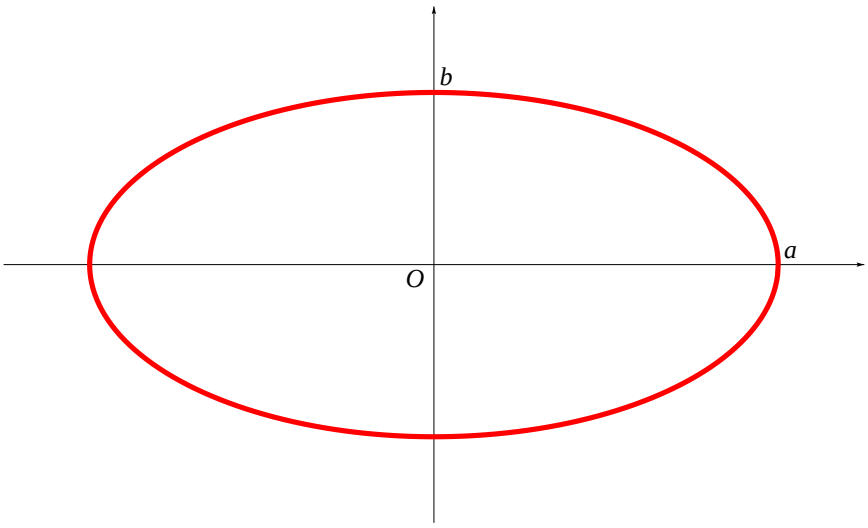
Elle peut aussi être obtenue par dédoublement des variables :

$$\frac{X_0 X}{a^2} + \frac{Y_0 Y}{b^2} = 1$$

Caractérisation bifocale.

En conservant les notations précédentes, on a :

$$\Gamma = \{M \in \mathcal{P} \text{ t.q. } \qquad\qquad \}$$



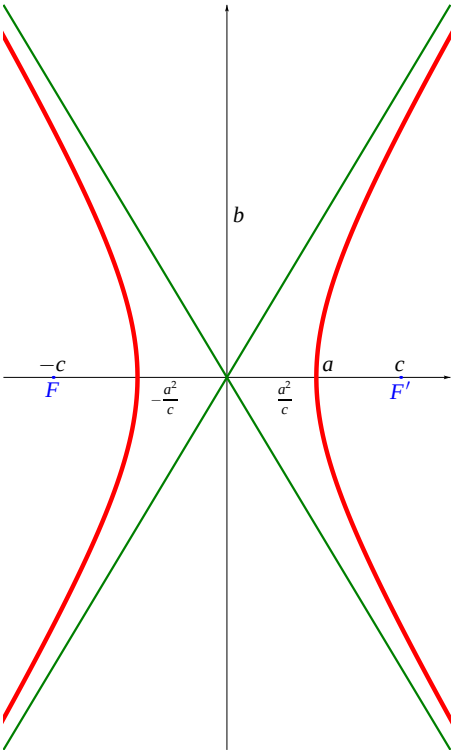
Application. Méthode dite « du jardinier »

Exercice (Th. de Poncelet). Montrer que la normale à l'ellipse en M est la bissectrice de $\widehat{FMF'}$.

Application.

2.3 Propriétés de l'hyperbole.

Remarque. *Dans ce qui précède comme dans ce qui suit, on suppose que le second membre de l'équation réduite est* $+1$.
Vocabulaire.
Remarque.



Propriété. L'hyperbole admet deux asymptotes, d'équations
Remarque. *On obtient les équations des asymptotes en annulant le second membre de l'équation réduite.*
Définition. Une hyperbole est dite **équilatère** si et ssi
Remarque. *Cela équivaut à* $a = b$.
Caractérisation bifocale.

En conservant les notations précédentes, on a :

$$\Gamma = \{M \in \mathcal{E} \text{ t.q. } \qquad\qquad \}$$

2.4 Démonstrations

2.4.1 Équations réduites des coniques

Preuve. On veut montrer que dans un repère orthonormal bien choisi, les coniques ont une équation cartésienne de la forme annoncée.
On se place dans le repère $(I, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ suivant : Soit $d = d(F, \mathcal{D})$, I la projection orthogonale de F sur $\mathcal{D}$, $\vec{e_1} = \frac{1}{d}\overrightarrow{IF}$ et $\vec{e_2}$ le vecteur qui lui est directement orthogonal. [Faire une figure à ce stade]. Pour $M(x, y)$, on a alors $H(0, y)$ et $F(d, 0)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} M \in \Gamma \quad &\iff \quad (x-d)^2 + y^2 = e^2x^2 \\ &\iff \quad (1-e^2)x^2 + y^2 - 2dx + d^2 = 0 \end{aligned}$$

(a) Étude des paraboles
Ici, on est dans le cas où $e = 1$. L'équation cartésienne de la parabole s'écrit donc $y^2 = 2dx - d^2$
Quitte à effectuer un changement d'origine du repère, et poser $\begin{cases} X = x - \frac{d}{2} \\ Y = y \end{cases}$ et $p = d$, on obtient l'*équation réduite* de la parabole comme annoncé.

(b) Étude des ellipses
On est ici dans le cas où $0 < e < 1$. L'équation cartésienne de l'ellipse peut s'écrire :

$$(1-e^2)\left(x - \frac{d}{(1-e^2)}\right)^2 + y^2 = \frac{d^2e^2}{1-e^2}$$

On effectue alors le changement de repère $\begin{cases} X = x - \frac{d}{(1-e^2)} \\ Y = y \end{cases}$. On pose $a = \frac{de}{1-e^2}$ et $b = \frac{de}{\sqrt{1-e^2}}$. On obtient alors l'*équation réduite* de l'ellipse comme annoncé.

(c) Étude des hyperboles
On est ici dans le cas où $1 < e$. On fait exactement la même manipulation que pour l'ellipse, avec le même changement de variable. On obtient (b est un tout petit peu modifié) l'*équation réduite* de l'hyperbole, comme annoncé. [Faire les calculs]

□

2.4.2 Caractérisation bifocale des coniques

On traite le cas de l'ellipse, celui de l'hyperbole étant analogue.

Preuve. Soit $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P} \text{ t.q. } MF + MF' = 2a\}$ Soit O le milieu de $[FF']$ et $c = OF$. Notons $\vec{e_1} = \frac{1}{c}\overrightarrow{OF}$ et $\vec{e_2}$ le vecteur qui lui est directement orthogonal. Alors dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ ainsi construit, $F(c,0)$ et $F'(-c,0)$, et pour tout $M(x,y)$:

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{C} &\iff MF + MF' = 2a \\
&\iff \sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a \\
&\iff (x-c)^2 + y^2 + (x+c)^2 + y^2 + 2\sqrt{((x-c)^2+y^2)((x+c)^2+y^2)} = 4a^2 \\
&\iff \sqrt{(x^2+y^2+c^2-2cx)(x^2+y^2+c^2+2cx)} = 2a^2 - c^2 - x^2 - y^2 \\
&\iff \begin{cases} (x^2+y^2+c^2)^2 - 4c^2x^2 = (2a^2 - (c^2+x^2+y^2))^2 \\ 2a^2 - c^2 - x^2 - y^2 \geqslant 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} (a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2) \\ x^2+y^2 \leqslant 2a^2 - c^2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Posant $b = \sqrt{a^2-c^2}$, on a donc :

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{C} &\iff \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x^2+y^2 \leqslant a^2+b^2 \end{cases} \\
&\iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1
\end{aligned}$$

car si la première égalité est vérifiée, la seconde inégalité l'est automatiquement ($x^2+y^2 \leqslant a^2$ pour tout point de l'ellipse que l'on va reconnaître ; penser au cercle principal).
On reconnaît l'équation réduite de l'ellipse de foyer $F(c,O)$ et de directrice D : $x = \frac{a^2}{c}$. □

3 Coniques définies par une équation cartésienne

3.1 Méthode

Présentation. Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère la courbe Γ d'équation

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.
Remarque. *Si $a = b = c = 0$, l'étude est immédiate. C'est soit le vide, soit une droite, soit le plan. C'est pourquoi on suppose $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.*
Définition. On appelle **discriminant réduit** de Γ la quantité :

$$\Delta =$$

Règle si $\Delta = 0$ (parabole). Si $\Delta = 0$:

(a)

(b)

Règle si $\Delta > 0$ (hyperbole) ou $\Delta < 0$ (ellipse). Si $\Delta \neq 0$, c'est une **conique à centre**.

(a)

(b)

(c)

3.2 Exemples

Exemple 1. Représenter la courbe d'équation : $x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 4y + 1 = 0$

Exemple 2. Représenter la courbe d'équation : $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 + (6\sqrt{3} - 28)x + (12\sqrt{3} - 26)y + 25 - 12\sqrt{3} = 0$.

Exemple 3. Représenter la courbe d'équation : $x^2 + \sqrt{3}xy + x = 2$

Autour des équations cartésiennes

9.1

(a) Déterminer une équation cartésienne de la conique $\mathcal{C}$ de foyer F de coordonnées $(2,1)$, de directrice $\mathcal{D}$ d'équation $x = 5$ et d'excentricité $e = \frac{2}{3}$.

(b) Préciser son centre et en donner une équation réduite.

(c) Déterminer les sommets, le second foyer et la seconde directrice de $\mathcal{C}$.

9.2 Nature et éléments caractéristiques des coniques d'équations :

(a) $x^2 + xy + y^2 = 1$

(b) $x^2 - 2y^2 + x - 2y = 0$

(c) $y^2 + 3x - 4y = 2$

(d) $15x^2 + 13y^2 - 2\sqrt{3}xy = 768$

9.3 Reconnaître et caractériser les ensembles définis dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ par l'équation :

$$13x^2 - 32xy + 37y^2 - 5 = 0$$

Donner l'équation de la tangente au point $M_0(x_0, y_0)$. Chercher les points pour lesquels la tangente est parallèle à l'axe (Ox).

9.4 Soit a, b réels positifs avec $a > b$. Dans le plan affine euclidien usuel, on considère l'ellipse Γ d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Soit $M \in \Gamma$ et M' le symétrique de M par rapport au grand axe. On note P le point d'intersection de (OM') avec la normale en M à Γ. Déterminer le lieu des points P lorsque M décrit Γ.

9.5 On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation :

$$5x^2 + y^2 - 10x + 4y + 4 = 0$$

Déterminer sa nature et préciser ses éléments géométriques.

Un peu de géométrie

9.6 Soit C_1 et C_2 les cercles de centres respectifs Ω_1 et Ω_2 et de rayons respectifs R_1 et R_2 strictement positifs.

(a) Déterminer la nature du lieu H des centres des cercles tangents extérieurement à C_1 et C_2.

(b) Si C_1 et C_2 sont deux cercles d'équation respectives $(x-2)^2+y^2 = 4$ et $x^2 + (y-1)^2 = 1$, déterminer une équation cartésienne de H.

9.7 Dans le plan affine euclidien usuel, muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A\,(1,0)$ et $B\,(0,1)$, ainsi que l'ensemble Γ des points dont la somme des carrés des distances aux trois côtés du triangle (OAB) est égale à $\frac{1}{3}$.

(a) Montrer que Γ est une ellipse. En donner les éléments caractéristiques.

(b) Monter que Γ est tangente aux droites (OA) et (OB).

(c) Donner une représentation paramétrique de Γ.

9.8 Soit $ABCD$ un rectangle. Déterminer le lieu des points M tels que les cercles circonscrits aux triangles MAB et MCD aient le même rayon.

9.9 Soit A, A' et F trois points distincts du plan. On considère l'ensemble H des ellipses passant par A et A' et admettant F pour foyer. Montrer que l'ensemble des seconds foyers F' des ellipses de H est une branche d'hyperbole.

9.10 Pour une courbe Γ donnée, on appelle **courbe orthoptique** de Γ le lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes à Γ orthogonales entre elles.

(a) Déterminer la courbe orthoptique d'une hyperbole.

(b) Déterminer la courbe orthoptique d'une parabole.

(c) Déterminer la courbe orthoptique d'une ellipse.

9.11 Dans $\mathcal{E}_2$ muni d'un repère orthonormal, on considère $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$ où $p > 0$. Soit $A \in \mathcal{P}$.

(a) Montrer que toute les droites coupant $\mathcal{P}$ en deux points M et N tels que $(AM) \perp (AN)$ passent par un point fixe Q.

(b) Déterminer le lieu de Q lorsque A décrit $\mathcal{P}$.

9.12 Soit a, b réels positifs avec $a > b$. Dans le plan affine euclidien usuel, on considère l'ellipse Γ d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Soit $M \in \Gamma$ et M' le symétrique de M par rapport au grand axe. On note P le point d'intersection de (OM') avec la normale en M à Γ. Déterminer le lieu des points P lorsque M décrit Γ.

Propriétés des coniques

9.13 Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de foyer F et F', de cercle principal $\mathcal{C}$. Soit $M \in \mathcal{E}$, H (resp. H') la projection orthogonale de F (resp. F') sur la tangente à $\mathcal{E}$ en M.

(a) Montrer que $H \in \mathcal{C}$ et $H' \in \mathcal{C}$.

(b) Les droites (HF) et $(H'F')$ recoupent $\mathcal{C}$ en deux points notés respectivement K et K'. Montrer que $HH'K'K$ est un rectangle.

9.14 Soit C une ellipse de foyers F et F', et $M \in C$. Montrer que la tangente en M à C est la bissectrice extérieure de $((MF), (MF'))$.

9.15 Soit P une parabole, F son foyer, T sa tangente au sommet, M un point de T et $\mathcal{D}$ une droite passant par M. Montrer que $\mathcal{D}$ est tangente à P si et seulement si $\mathcal{D}$ est orthogonale à (FM).

9.16 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Déterminer et représenter le lieu des pieds des normales menées de O aux tangentes à l'hyperbole équilatère $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne $xy = 1$.

9.17 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $\mathcal{C}$ la parabole d'équation cartésienne $y^2 = 2px$, où $p > 0$ est fixé. Un point M décrit $\mathcal{C}$; la normale en M à $\mathcal{C}$ rencontre (Ox) en un point P et (Oy) en un point Q. Déterminer et représenter le lieu du point I, milieu du segment $[PQ]$.

9.18 Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole équilatère de centre O et $M \in \mathcal{H}$. Le cercle tangent à $\mathcal{H}$ en M et contenant O recoupe $\mathcal{H}$ en deux points P et P'.

(a) Montrer que $(PP') \perp (OM)$

(b) Montrer que le symétrique de O par rapport à (PP') est sur $\mathcal{H}$.

9.19 Reconnaître et caractériser les ensembles définis dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ par les représentations paramétriques suivantes :

(a) $\begin{cases} x = t^2 + t + 1 \\ y = t^2 - 2t + 2 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$

(b) $\begin{cases} x = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)\cos t + \sin t \\ y = \cos t - \sin t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$

(c) $\begin{cases} x = \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} \\ y = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$

9.20 On travaille dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni du repère orthonormal usuel. On considère le cercle défini comme intersection du plan d'équation $x + y - z = -2$ et de la sphère d'équation $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 4$. Déterminer une équation de son projeté orthogonal sur le plan xOy.