

Ensembles, applications

1 Ensembles

1.1 Définitions

Définition. On appelle **ensemble**

On note $\emptyset$

Exemple.

Remarque.

Vocabulaire.

- A est **inclus** dans B si et seulement si
- Deux ensembles sont **égaux** si et seulement si

Vocabulaire.

- A est **strictement inclus** dans B si et seulement si

Vocabulaire.

- Si E est un ensemble, ses **sous-ensembles**, ou **parties**, sont
- Si E et F sont deux ensembles, le **produit cartésien** de E et F est

Remarque.

Exemple. Pour $E = \{0, 1, 2\}$, énumérer les éléments de $\mathcal{P}(E)$.

Remarque.

Exercice. Déterminer $\mathcal{P}(E)$ puis $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ lorsque $E = \{0\}$ puis lorsque $E = \emptyset$.

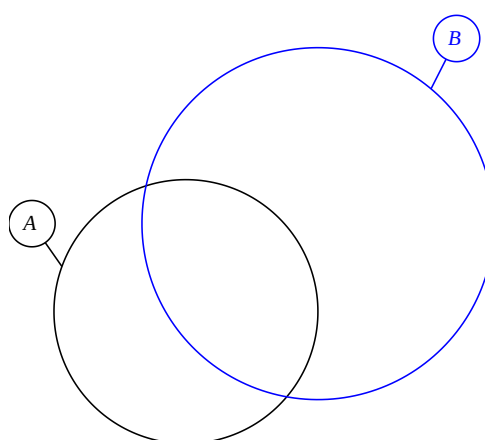
Exercice. Quel est l'ensemble $E \times \emptyset$? Existe-t-il des ensembles E et F tels que $E \times F = \emptyset$?

1.2 Opérations sur les ensembles

Soit E un ensemble, A, B, C des éléments de $\mathcal{P}(E)$.

Définition. On appelle **intersection** de A et B la partie de E définie par :

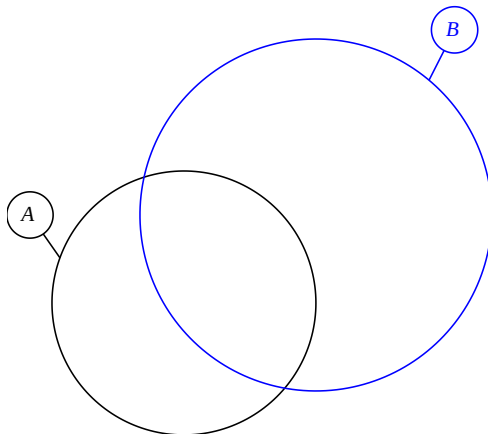
$$A \cap B =$$



Définition. Deux parties de E sont dites **disjointes** si et seulement si

Définition. On appelle **réunion** de A et B la partie de E définie par :

$$A \cup B =$$

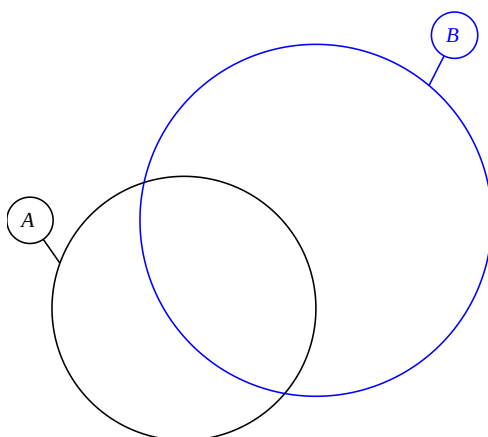


Propriété. $\cap$ et $\cup$ sont des applications $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$. On dit que ce sont des *lois de composition interne* de $\mathcal{P}(E)$. Elles vérifient :

- **Commutativité :**
- **Associativité :**
- **Distributivité de $\cap$ sur $\cup$:**
- **Distributivité de $\cup$ sur $\cap$:**

Définition. On appelle **différence (ensembliste)** de A par B la partie de E définie par :

$$A \setminus B =$$

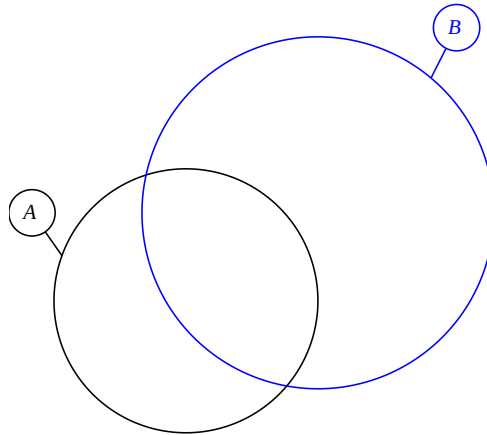


Exemple. $A \setminus A =$, $A \setminus \emptyset =$

Exercice. Si A et B sont disjoints, que dire de $A \setminus B$?

Définition. On appelle **complémentaire** de A dans E la partie de E définie par :

$$\complement_E A =$$



Remarque.

Exemple. $\complement_E \emptyset =$ et $\complement_E E =$.

Remarque.

Propriété.

- $\complement_E A =$;
- $A \setminus B =$ = ;
- $\complement_E (A \cup B) =$ et $\complement_E (A \cap B) =$.

Définition. Soit E un ensemble et A_i des parties de E . On dit que les A_i forment une **partition** de E si et seulement si

Exemple.

2 Applications

2.1 Généralités

Définition naïve. Soit E et F deux ensembles. Une **application** f de E vers F est

Notation. $f : E \rightarrow F$
 $x \mapsto f(x)$

Remarque. Pour que f soit une application, il faut dans cette définition
 et

Vocabulaire. E est la et F

Si $x_0 \in E$ et $y_0 = f(x_0)$,

y_0 est

tandis que x_0 est

Remarque.

Définition. On appelle **ensemble de définition**, ou **domaine de définition** d'une application $f : E \rightarrow F$ l'ensemble suivant :

$$D_f =$$

La « vraie » application correspondante est

Notation. L'ensemble des applications de E dans F est noté

Définition. L'application identique de E est définie par

Définition. On dit que deux applications f et g sont **égales** si et seulement si

2.2 Restriction et prolongement

Définition. Soit $f : E \rightarrow F$ une application et $A \subset E$. On appelle **restriction** de f à A , et on note $f|_A$ l'application

Définition. Soit $A \subset E$, F des ensembles et $f : A \rightarrow F$ une application. Un **prolongement** de f à E est

Exemple. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$x \mapsto x^2 \quad x \mapsto x^2 \quad x \mapsto x^2$$

Exemple. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x \ln x$$

Prolonger f à $\mathbb{R}_+$.

Combien y a-t-il de prolongements ?

Y en a-t-il un particulier ?

Exemple. Est-ce que $\text{Id}_{\mathbb{R}}$ est un prolongement de $\text{Id}_{\mathbb{Z}}$?

2.3 Propriétés

2.3.1 Injection

Définition. Une application $f : E \rightarrow F$ est dite **injective** si et seulement si

soit encore, par contraposée

Négation. La négation de l'injectivité est :

Remarque.

Exemple.

Définition. Soit E un ensemble et $A \subset E$. L'application $i : A \rightarrow E$ est injective. On l'appelle

$$x \mapsto x$$

2.3.2 Surjection

Définition. Une application $f : E \rightarrow F$ est dite **surjective** si et seulement si

Négation. f n'est pas surjective si et seulement si :

Exemple.

2.3.3 Bijection

Définition. Une application $f : E \rightarrow F$ est dite **bijection** si et seulement si

Caractérisation.

f est bijective si et seulement si

ou encore

Exemple.

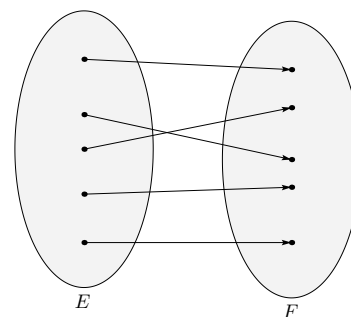
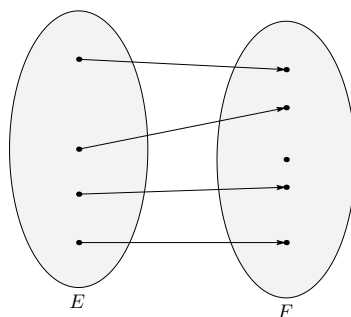
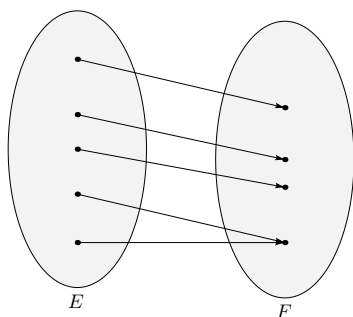
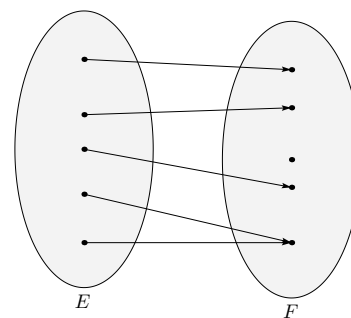
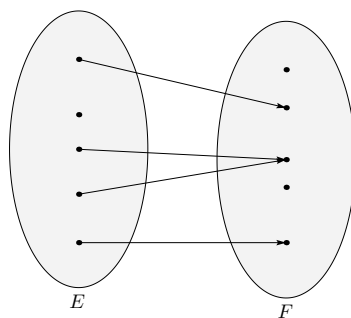
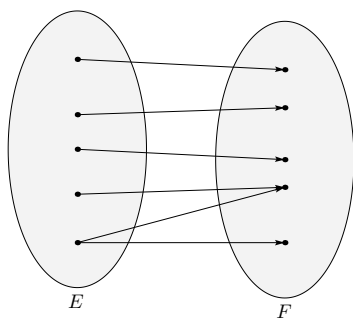
Définition. Si $f : E \rightarrow F$ est une bijection, on peut définir son **application réciproque**

Question. Pourquoi est-il indispensable d'avoir une bijection pour pouvoir définir une application réciproque ?

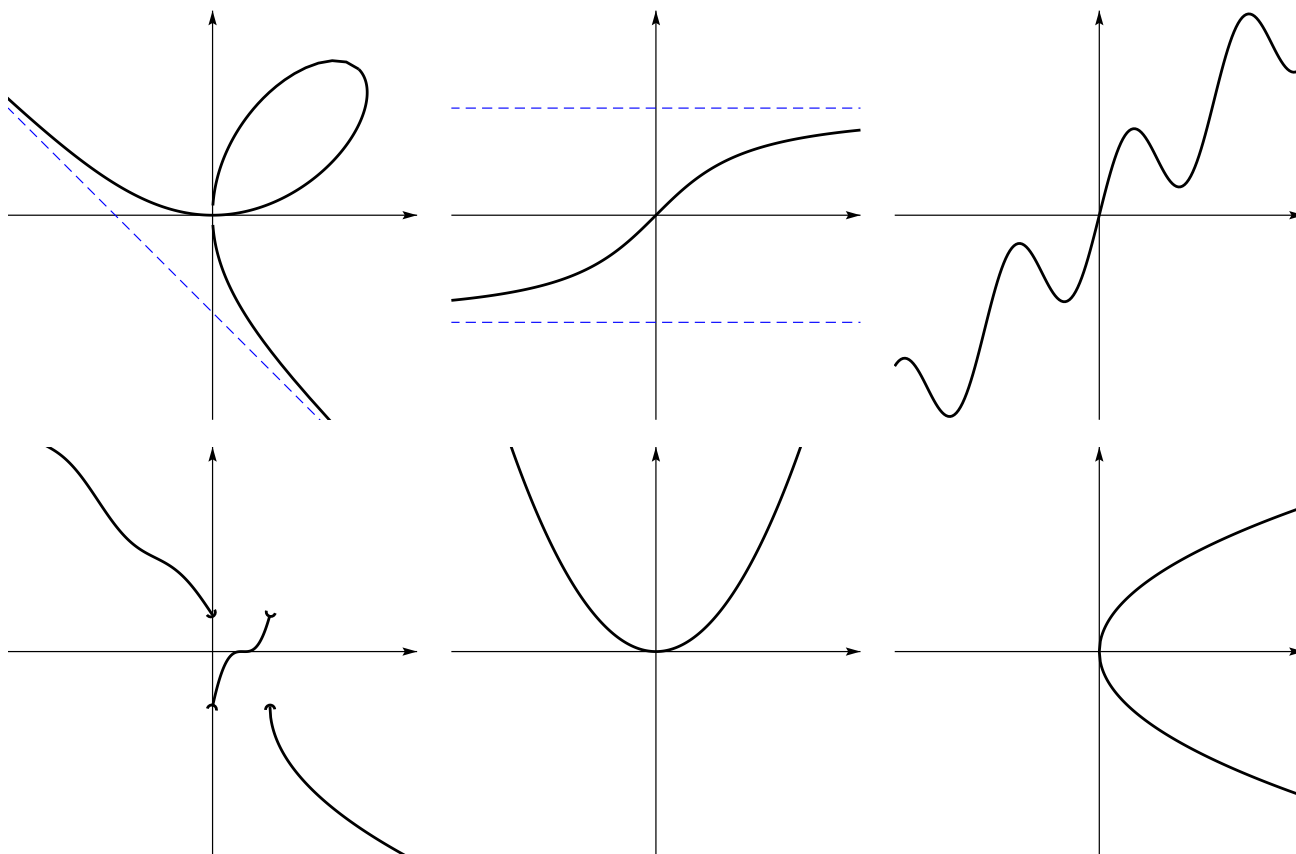
Remarque. Il y a un lien fort entre injectivité/surjectivité de f et l'étude du nombre de solution d'une équation $f(x) = \lambda$. Sauriez-vous le formaliser ?

2.4 Diagrammes

Illustrations. Les applications vont de E dans F .



Illustrations. Les applications vont de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.



Question. Lorsque les ensembles E et F ont un nombre fini non nul d'éléments, peut-on donner une condition sur ce nombre d'éléments pour qu'il soit possible de construire

- une application de E dans F ;
- une injection ;
- une surjection ;
- une bijection ?

2.5 Composition des applications

Définition. Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications. On définit l'application **composée de f et g** par

Attention.

Remarque.

Propriété. La composée de deux injections (resp. surjections, resp. bijections) est une injection (resp. surjection, resp. bijection).

Proposition. Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

- Si $g \circ f$ est injective, alors
- Si $g \circ f$ est surjective, alors

Théorème.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.
 f est une bijection si et seulement si

Lorsqu'elle existe,

Corollaire.

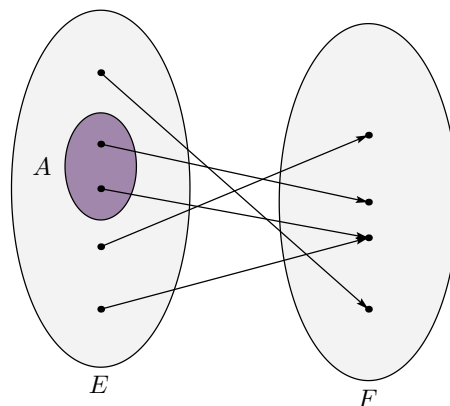
- (a) Si f est une **involution** de E (i.e. $f \circ f = \text{Id}_E$), alors
- (b) Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux bijections. Alors $g \circ f$ est

3 Images directe et réciproque d'une partie

3.1 Image directe

Définition. Soit $f : E \rightarrow F$ et $A \subset E$. L'image directe de A par f est

$$f(A) =$$



Propriété. f est surjective si et ssi

Propriété. Soit A et A' deux parties de E .

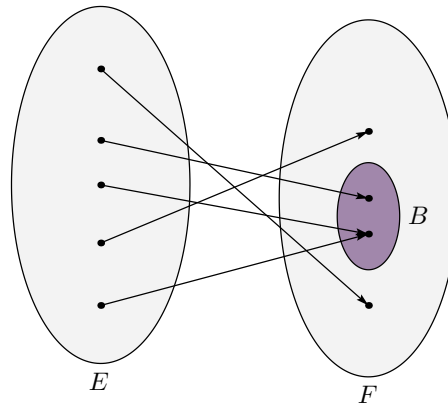
- $A \subset A'$
- $f(A \cup A')$
- $f(A \cap A')$

Remarque.

3.2 Image réciproque

Définition. Soit $f : E \rightarrow F$ et $B \subset F$. L'image réciproque de B par f est

$$f^{-1}(B) =$$



Exemple.

Propriété. Soit B et B' deux parties de F .

- $B \subset B'$
- $f^{-1}(B \cup B')$
- $f^{-1}(B \cap B')$
- $f[f^{-1}(B)]$
- $f^{-1}[f(A)]$

Attention.

4 Compléments

4.1 Définition d'une application par son graphe

Définition. Soit E et F deux ensembles. Nous appellerons **graphe**

Le **domaine de définition** d'un graphe est

$$D_{\mathcal{G}} =$$

Un graphe est dit **fonctionnel** si

Remarque.

Question. Comment quantifier qu'un graphe n'est pas fonctionnel ?

Définition. La donnée d'un graphe fonctionnel dont le domaine de définition est E permet de définir l'**application** f de E dans F qui à tout $x \in E$ associe

Notation.

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Remarque. Cette définition est cohérente avec la définition de la représentation graphique d'une fonction vue au lycée. Pour que f soit une application, il faut qu'elle transforme

élément de E elle associe F et qu'à chaque $x \in E$ elle associe un unique $y \in F$. Le graphe de f est alors l'ensemble des couples (x, y) tels que $y = f(x)$. On dit que $y = f(x)$ est une représentation de la courbe

Exemple. Parmi les schémas du paragraphe 2.4, déterminer ceux correspondant à un graphe, à un graphe fonctionnel, à une injection, à une surjection, à une bijection.

4.2 Famille d'éléments d'un ensemble

Définition. On appelle **famille** d'éléments d'un ensemble E indexée par un ensemble I

Notation. On note généralement $(x_i)_{i \in I}$ une telle famille.

Exemple. Lorsque $I = \{1, 2\}$, on peut identifier les familles d'éléments de E indexées par $\{1, 2\}$ avec le produit cartésien $E \times E$. (La définition d'une famille, c'est la donnée de x_1 et x_2 .)

Plus généralement, lorsque $I = \{1, \dots, n\}$, l'ensemble des familles d'éléments de E indexées par $\{1, \dots, n\}$ s'identifie à E^n .

Notation. On note E^I l'ensemble des familles d'éléments de E indexées par I .

Remarque. La notion de famille est bien la même que celle d'application. Seule la notation (et le point de vue) change.

Question. Qu'est-ce qu'une suite ?

Remarque. Y a-t-il une différence entre $(x_k)_{k \in K}$ et $\{x_k \mid k \in K\}$?

Définition. On peut généraliser aux familles de parties d'un ensemble E les notions d'intersection et de réunion :

$$\bigcap_{i \in I} A_i =$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i =$$

Remarque.

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff$$

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff$$

4.3 Rédactions classiques

Ce ne sont pas les seules rédactions possibles, mais elles permettent de s'en sortir dans la plupart des cas. Les notations sont les notations usuelles.

Pour montrer $A \subset B$.

Soit $x \in A$ quelconque alors $x \in B$

Pour montrer $A = B$.

M1 On montre d'abord $A \subset B$ puis $B \subset A$.

M2 $x \in A \iff$ $\iff x \in B$

Pour montrer $f = g$.

On vérifie l'égalité des sources et buts

Soit $x \in$ source quelconque. alors $f(x) = g(x)$

Pour montrer f injective.

Soit $x, y \in E$ quelconques.

On suppose $f(x) = f(y)$ alors $x = y$.

Pour utiliser que f injective.

Dans notre raisonnement, on a $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. On en déduit que $x = y$.

Pour montrer f surjective.

Soit $y \in F$ quelconque.

On cherche $x \in E$ t.q. $y = f(x) \iff$
cette équation admet au moins une solution donc f est surjective.

Pour utiliser que f surjective.

Dans notre raisonnement, on a un $y \in F$. On en déduit qu'il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Pour montrer f est bijective.

M1 On montre que f est surjective **puis** injective.

M1bis On montre que f est surjective et unicité de l'antécédent.

M2 Soit $g : F \rightarrow E$, $y \mapsto \dots$

On a $f \circ g = [\dots] = \text{Id}_F$ et $g \circ f = [\dots] = \text{Id}_E$ donc f bijective.

Pour montrer $x \in f^{-1}(B)$.

c'est facile !

Calculons $f(x) = \dots$. On a bien $f(x) \in B$.

Pour montrer $y \in f(A)$.

c'est « dur » !

On cherche $x \in A$ t.q. $y = f(x)$. Posons $x = \dots$, il convient.

4.4 Utilisation de Maple

Un **ensemble** est de type **set**. C'est une collection non ordonnée d'expressions toutes différentes, séparées par des virgules, notées entre accolades. On peut effectuer des opérations sur les ensembles en utilisant **union**, **intersect**, **minus**.

Une **fonction** est de type **procedure** et est caractérisé par l'opérateur flèche $\rightarrow$. Certaines fonctions sont prédéfinies. Par défaut, les variables sont complexes.

On veillera à ne pas confondre une *fonction* avec une *expression*. L'utilisation des outils de **Maple** nécessite de savoir si l'argument à fournir est une fonction ou une expression. On doit être capable de transformer une fonction en expression et réciproquement. Voir le cours de **Maple** à ce sujet.

Alphabet grec

nom	minuscule	majuscule
alpha	α	
bêta	β	
gamma	γ	Γ
delta	δ	Δ
epsilon	ε	
zêta	ζ	
êta	η	
thêta	θ	Θ
iota	ι	
kappa	κ	
lambda	λ	Λ
mu	μ	
nu	ν	
xi	ξ	Ξ
pi	π	Π
rhô	ρ	
sigma	σ	Σ
tau	τ	
upsilon	υ	
phi	ϕ, φ	Φ
chi	χ	
psi	ψ	Ψ
omega	ω	Ω

Opérations sur les ensembles

10.1 Nier les définitions du cours portant sur l'inclusion, l'égalité, l'inclusion stricte, le caractère disjoints de deux ensembles.

10.2 Soit A, B, C trois parties d'une ensemble E non vide.

- (a) Si $A \cup B = A \cup C$, a-t-on $B = C$?
- (b) Si $A \cup B = A \cap B$, a-t-on $A = B$?
- (c) Montrer que si $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$, alors $B = C$.
- (d) Montrer que si $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$, alors $A = \complement B$ et $B = \complement A$.

10.3 Soit E un ensemble, A, B, C trois parties de E . Montrer que :

- (a) $(A \cap B \subset A \cap C \text{ et } A \cup B \subset A \cup C) \implies B \subset C$;
- (b) $A \setminus B = A \setminus C \implies A \cap B = A \cap C$;
- (c) $(A \cap B = A \cup C \text{ et } A \cup B = A \cap C) \implies A = B = C$;
- (d) $A \subset B \iff \complement_E(A) \supset \complement_E(B) \iff A \cup B = B$
 $\iff A \cap B = A \iff A \setminus B = \emptyset \iff \complement_E(A) \cup B = E$.

10.4 Soit E un ensemble non vide, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E ; On définit dans $\mathcal{P}(E)$ l'opération Δ , appelée *différence symétrique*, par :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

- (a) Exprimer autrement $A \Delta B$ et faire un diagramme représentant $A \Delta B$;
- (b) Donner $A \Delta E$ et $A \Delta \emptyset$;
- (c) Donner $A \Delta A$;
- (d) Si $A \Delta B = \emptyset$, que dire de A et B ?
- (e) Reformuler les résultats de (c) et (d) en une phrase mathématique.

10.5 Montrer que $\overline{A \Delta B} = A \Delta B$, où $\overline{A}$ désigne le complémentaire de A dans E , et Δ la différence symétrique.

10.6 Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\{1, 2, \dots, 57\}$. Pour $i \in \{1, 2, \dots, 57\}$, on pose $A_i = \{f \in E \mid f(0) = i\}$. Montrer que les A_i forment une partition de E .

10.7 Donner la liste des éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1, 2\}))$.

10.8 Soit E et F deux ensembles. Montrer que $\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$.

Images directe et réciproque

10.9 Soit $f : E \rightarrow F$ une application. On se pose les deux questions suivantes :

- (a) Soit A une partie de E . Comparer $f^{-1}[f(A)]$ et A . Que peut-on dire lorsque f est injective ?
- (b) Soit B une partie de F . Comparer $f[f^{-1}(B)]$ et B . Que peut-on dire lorsque f est surjective ?

Répondre à ces questions en étudiant d'abord les deux exemples suivants :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad A = [0, 1] \quad B = \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$$

$$x \mapsto x^2$$

$$g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \quad A =]0, 1[\quad B = [1, +\infty[$$

$$x \mapsto \ln x$$

10.10 Soit $f : E \rightarrow F$ une application, $A \in \mathcal{P}(E)$, $B \in \mathcal{P}(F)$. Montrer que $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.

10.11 Soit $f : E \rightarrow F$ où E et F sont deux ensembles. Montrer que f est injective si et ssi :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

(d) $(g \circ f)$ surjective et g injective $\implies f$ surjective.

10.17 Soient E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de E dans G . On considère $h : E \rightarrow F \times G$
 $x \mapsto (f(x), g(x))$

- (a) Montrer que si f ou g est injective, alors h l'est également. Réciproque ?
 (b) On suppose f et g surjectives, qu'en est-il de h ?

10.18 Soit E, F et G trois ensembles. Soit $f : F \rightarrow G$. Montrer que f est injective si et ssi :

$$\forall (g, h) \in (F^E)^2, (f \circ g = f \circ h \implies g = h)$$

Familles

10.19 Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un ensemble E , $i_0 \in I$ et $F \subset E$.

- (a) Donner les relations d'inclusion entre A_{i_0} , $\bigcap_{i \in I} A_i$ et $\bigcup_{i \in I} A_i$.
 (b) Que valent $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cup F$ et $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap F$?
 (c) Comment montrer $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset F, \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \supset F, \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \subset F,$
 $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \supset F$?

10.20 Que valent $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n], \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n, n+1], \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [0, 1 - \frac{1}{n}],$
 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [0, 1 - \frac{1}{n}[, \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [0, 1 + \frac{1}{n}], \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} [0, 1 + \frac{1}{n}]$?

Illustration des propriétés des applications

10.12 « Mère » est-elle une application ? Et « sœur » ?

10.13 Soit :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 - 2x + 3$$

f est-elle injective, surjective ? Trouver deux intervalles d'amplitude maximale I et J tels que f induise une bijection de I sur J . S'agit-il d'une restriction de f ?

(On n'attend pas ici de démonstration précise.)

10.14

- (a) Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $[-1, 1]$ définie par $f(x) = \sin(\pi x)$.
 f est-elle injective, surjective, bijective ?
 (b) On note g la restriction de f à $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. Montre que g est une application bijective de $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ sur $] -1, 1[$.
 (c) Soit h l'application de $\mathbb{R}$ dans $] -1, 1[$ définie par $h(x) = \frac{x}{1+|x|}$.
 Montrer que h est bijective et déterminer sa réciproque.

10.15 Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $n \mapsto 2n \quad n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$
 Déterminer les applications $f \circ g, g \circ f$, étudier injectivité et surjectivité de $f, g, f \circ g$ et $g \circ f$.

Propriétés des applications

10.16 Soit E, F, G trois ensembles et $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$ deux applications. Démontrer que :

- (a) $g \circ f$ injective $\implies f$ injective ;
 (b) $(g \circ f$ injective et f surjective) $\implies g$ injective ;
 (c) $g \circ f$ surjective $\implies g$ surjective ;

10.21 Calculer, pour E ensemble non vide, $\bigcup_{X \in \mathcal{P}(E)} X$, $\bigcap_{X \in \mathcal{P}(E)} X$.

Déclassés

10.22 Pour toute partie A de E , on appelle *fonction indicatrice* de A l'application

$$\chi_A : E \rightarrow \{0, 1\} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Soit A et B deux parties d'un ensemble E . Montrer que $\chi_{A \cap B} = \chi_A \times \chi_B$ et $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$.

10.23 Soit E un ensemble non vide et $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \cap B = \emptyset \implies f(A \cup B) = f(A) + f(B)$$

Montrer que :

- (a) $f(\emptyset) = 0$;
- (b) $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$;
- (c) $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \subset B \implies f(A) \leq f(B)$.

10.24 Montrer qu'il n'existe pas d'application surjective d'un ensemble E vers l'ensemble de ses parties $\mathcal{P}(E)$.

Indication : Considérer $\{x \in E \text{ t.q. } x \notin f(x)\}$

10.25 Déterminer et représenter la partie $X = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x \text{ satisfait } P\}$ où P est :

- (a) $x \in \mathbb{Z} \implies x > 1$;
- (b) $x > 1 \implies x \in \mathbb{Z}$;
- (c) $x > 1 \iff x \in \mathbb{Z}$;
- (d) $x \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{N}$;
- (e) $x^2 < -1 \implies x = \pi$;
- (f) $x^2 > -1 \implies x = \pi$;
- (g) $x \leq 1 \implies x \notin \mathbb{Z}$;

Comparer les ensembles associés aux propriétés (a) et (g). Qu'en déduire.

On dit que (g) est la **contraposée** de (a). Donner la contraposée de (b), (e) et (f).

10.26 Ecrire la négation des phrases suivantes

- (a) $\forall x, \exists n \text{ t.q. } x \leq n$.
- (b) $\exists M \text{ t.q. } \forall n, |u_n| \leq M$.
- (c) $\forall x, \forall y, xy = yx$.
- (d) $\forall x, \exists y \text{ t.q. } yxy^{-1} = x$.
- (e) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N, |u_n| < \varepsilon$.
- (f) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ t.q. } \forall f \in \mathcal{F}, |x - y| < \alpha \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

10.27 Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } (n \geq N \implies 2 - \varepsilon < \frac{2n+1}{n} < 2 + \varepsilon)$$