Convexité

1 Définition

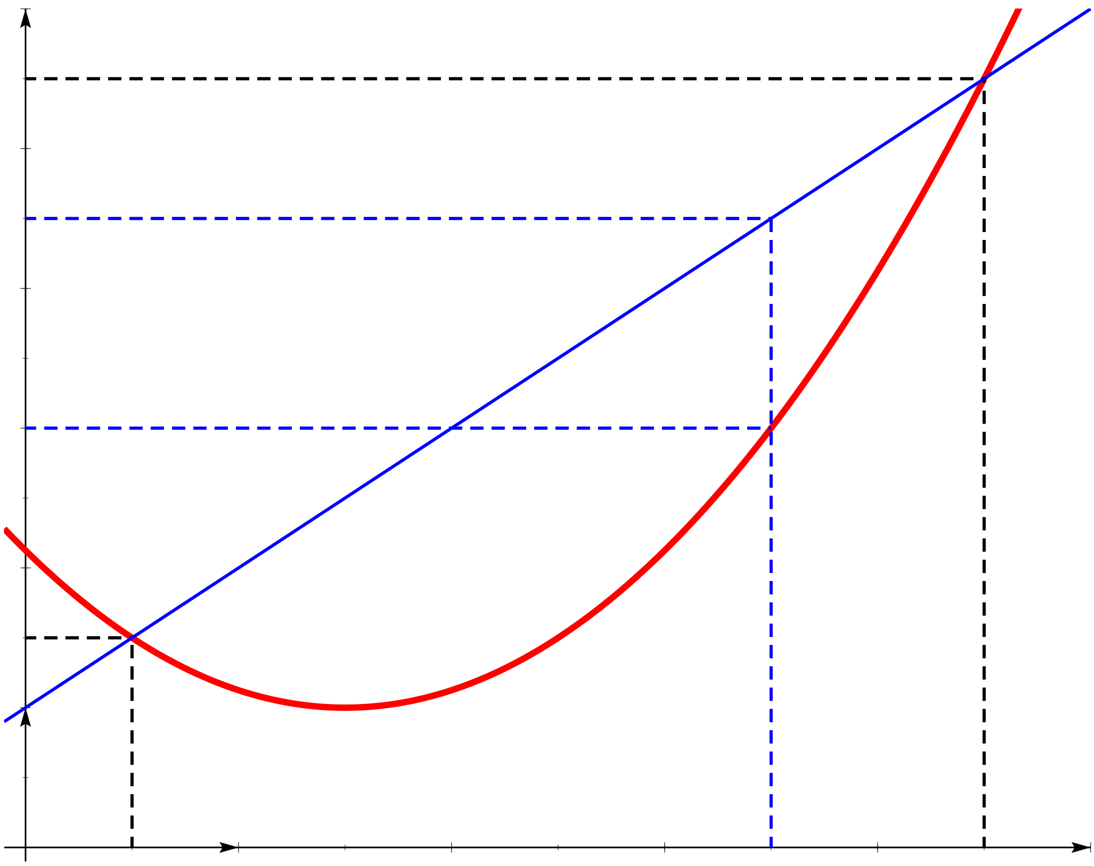
I désigne toujours un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est **convexe** si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0, 1],$$

On dit que f est **concave** si et seulement si

Interprétation graphique.



Théorème.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) f est une fonction convexe ;
(ii) Pour tout a de I, $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante ;
(iii) $\mathcal{C}_f$ est en dessous de toutes ses cordes

Remarque.

2 Inégalité de Jensen

Proposition (Inégalité de Jensen). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in I^n$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$. Alors :

Exemple. On peut déduire de l'inégalité de Jensen l'inégalité classique suivante :

$$\sqrt[n]{y_1 \ldots y_n} \leqslant \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n} \qquad \forall (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}_+^n$$

3 Lien avec la dérivabilité et la continuité

Proposition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application convexe. Alors en tout point a de I qui n'est pas une extrémité de I, f est

Corollaire. Si f est convexe sur l'intervalle I, alors f est

Exemple. On réfléchira aux trois exemples suivants de fonctions définies sur $[-1, 1]$ pour ne pas faire de généralisation abusive de ces résultats :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-1, 1[\\ 1 & \text{si } x = -1 \text{ ou } 1 \end{cases}$$
$$g : x \mapsto 1 - \sqrt{1 - x^2}$$
$$h : x \mapsto |x|$$

4 Cas des fonctions dérivables

Théorème.

> Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I.
> f est convexe sur I si et seulement si

Corollaire. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I.
f est convexe sur I si et seulement si

Propriété. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et dérivable sur I. Alors pour tout $a < b$ dans I,

Exemple. $x \mapsto \ln x$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto x^4$, $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \ln(1 + e^x)$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.

Exemple. sin est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc la courbe est en dessous de sa tangente en 0 et au dessus de sa corde. D'où l'inégalité classique à connaître :

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],$$

Définition. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On dit que f admet en a un **point d'inflexion** si et seulement si l'une des propriétés équivalentes suivantes est satisfaite :

(i) $f''(a) = 0$ et f'' change de signe en a

(ii) f' admet en a un extremum local

(iii) f change de concavité en a

Exemple. $x \mapsto x^3$ admet en 0 un point d'inflexion. $x \mapsto x^6$ n'admet pas en 0 de point d'inflexion.

$\boxed{\textbf{20.1}}$ Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ concave et dérivable. Montrer que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$$

$\boxed{\textbf{20.2}}$ Donner deux méthodes pour montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geqslant 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1$$

$\boxed{\textbf{20.3}}$ Montrer que pour tout $x \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, :

$$x^{n+1} - (n+1)x + n \geqslant 0$$

$\boxed{\textbf{20.4}}$ Montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < b \leqslant a$ on a :

$$\frac{a-b}{a} \leqslant \ln \frac{a}{b} \leqslant \frac{a-b}{b}$$

$\boxed{\textbf{20.5}}$ Soit f une fonction convexe sur $]0, +\infty[$.

(a) Montrer que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ admet une limite en $+\infty$ (finie ou $+\infty$).

(b) Montrer que si cette limite est un réel ℓ, alors $x \mapsto f(x) - \ell x$ admet une limite en $+\infty$ (finie ou $-\infty$).

$\boxed{\textbf{20.6}}$

(a) Montrer que toute application convexe majorée sur $\mathbb{R}$ est constante.

(b) Donner un contrexemple si on suppose la propriété vraie uniquement sur $]0, +\infty[$.

$\boxed{\textbf{20.7}}$ Préférez-vous votre moyenne trimestrielle calculée avec une moyenne arithmétique ($\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_n$) ou géométrique ($(\prod_{k=1}^n x_n)^{\frac{1}{n}}$) ?

$\boxed{\textbf{20.8}}$

(a) Démontrer l'inégalité ($x_1, \ldots, x_n > 0$) :

$$\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \ldots x_n}{n}$$

(b) Démontrer les inégalités ($a, b, c \geqslant 0,\ n \in \mathbb{N}^*$) :

(b.1) $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc$

(b.2) $(a+b+c)^3 \geqslant 27abc$

(b.3) $\sqrt[n]{n!} \leqslant \frac{n+1}{2}$

$\boxed{\textbf{20.9}}$

(a) Montrer que pour tout $x, y > 0$, $\alpha, \beta > 0$ t.q. $\alpha + \beta = 1$:

$$x^\alpha y^\beta \leqslant \alpha x + \beta y$$

(b) En déduire l'inégalité de Hölder ($a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n > 0$ et $\alpha, \beta > 0$ t.q. $\alpha + \beta = 1$) :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha \times \left(\sum_{i=1}^n b_i^{\frac{1}{\beta}}\right)^\beta$$

(c) À quoi correspond cette inégalité lorsque $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$?